Nogmaals

Kuipers, Theo A.F.

Published in:
Kennis En Methode, vol. 4 (3), 297-300

Publication date:
1980

Nogmaals 'diminishing returns from repeated tests'

Theo A. F. Kuipers

1. De vraag naar een deductivistische explicatie van Poppers hypothese "There is something like a law of diminishing returns from repeated tests" werd door Louis Boon verschoven van 'herhaling van tests' naar 'herhaald testen'.[1] Volgens hem betreft de in het geding zijnde intuïtie niet dat de waarde van herhaling van dezelfde test afneemt, maar de waarde van nieuwe tests. In mijn reactie liet ik zien dat er niettemin een deductivistische explicatie te geven is in het geval van herhaling van dezelfde test.[2] In enkele persoonlijke reacties daarop kwam naar voren dat men dat wel aardig vond, maar dat het grote bezwaar van deze explicatie zou zijn dat deze net zo goed op nieuwe tests kan worden toegepast en derhalve geen verschil maakt. In deze notitie zal ik laten zien dat consequente doorvoering van mijn aanvankelijke redenering precies de intuïties verklaart die de critici lijken te bepleiten en die ik in elk geval onderschrijf.

2. Zij T de algemene theorie die we willen toetsen. We veronderstellen steeds constante en consistente achtergrondkennis (B). Uit T (en B) volgen diverse universele (experimentele) hypothesen. Bij elke test t van T behoort eenduidig een universele hypothese H(t) die gefalsifieerd wordt als t een tegenvoorbeeld voor T oplevert ('−t' in plaats van '+t') en die volgt uit alle andere waarvoor dit geldt. We beschouwen nu testseries $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en spreken van een herhalingsserie als $H(t_i) = H(t_1)$ voor alle i. Het idee van een serie van steeds nieuwe tests is minder gemakkelijk te karakteriseren. Een test kan meer of minder afwijken van de vorige: er kan altijd een of ander verband zijn, in het licht van de achtergrondkennis. Eenvoudigheidshalve concentreren we ons op het tegenovergestelde extreem van een herhalingsserie: een serie van onafhankelijke tests, dat wil zeggen tests waarvan de betreffende universele hypothesen logisch onafhankelijk zijn in het licht van B. Hiervoor geldt dat de logische waarschijnlijkheden onafhankelijk zijn, dat wil zeggen:

(1)
$$p(H(t_i)\&H(t_j)/B) = p(H(t_i)/B)\cdot p(H(t_j)/B)\ ,\ i \neq j.$$

De eerder bedoelde intuïties luiden nu in aangescherpte vorm:

I de meerwaarde van een extra herhaling neemt af,

II de meerwaarde van een extra onafhankelijke test neemt af, III de meerwaarde van een extra herhaling neemt fundamenteel sneller af dan die van een extra onafhankelijke test.

3. Het centrale idee van de voorgestelde explicatie is de volgende a priori interpretatie van de meerwaarde van een extra test in een serie. De testwaarde $W(S_n)$ van een serie tests S_n definiëren we als de kans dat de serie tenminste één tegenvoorbeeld voor T oplevert. De meerwaarde $MW(t_{n+1}; S_n)$ van de extra test t_{n+1} ten opzichte van S_n interpreteren we nu als $W(S_n, t_{n+1})-W(S_n)$. Het is eenvoudig na te gaan dat algemeen geldt dat $MW(t_{n+1}; S_n)$ gelijk is aan de kans op de serie-uitkomst: $+t_1, +t_2, ..., +t_n, -t_{n+1}$, dat wil zeggen de a priori kans dat de extra test het eerste tegenvoorbeeld oplevert.

4. In het geval van een herhalingsserie is er maar één universele hypothese H in het geding. We stellen

(2)

$$O<p(H/B)=P<1.$$

De vooronderstelling $P\neq O$ zal straks nader gemotiveerd worden; verder, als P gelijk aan 1 zou zijn dan zou H al uit B volgen. De aanname dat T een interessante theorie is maakt de volgende vooronderstelling plausibel: uit B volgt dat als H onwaar is dan moet er een, al dan niet nader specificeerbare, positieve objectieve waarschijnlijkheid zijn dat een test een tegenvoorbeeld oplevert, dat wil zeggen er is een r zodanig dat:

(3)

$$O\leqslant p(+t_i/B\&-H)=r=1-p(-t_i/B\&-H)<1$$

De typisch deductivistische vooronderstelling is ten slotte:

(4)

$$p(\pm t_i, \pm t_j/B\&-H)=p(\pm t_i/B\&-H)\cdot p(\pm t_j/B\&-H)\ , i\neq j.$$

voor alle combinaties: voorwaardelijke onafhankelijkheid.

Uit het voorgaande volgt nu

(5)

$$MW\ (t_{n+1}; S_n)=p(-H/B)p(+t_1, +t_2, ..., +t_n, -t_{n+1}/B\&-H) = $$
$$=(1-P)\cdot r^n\cdot(1-r).$$

Deze uitdrukking gaat naar O als n naar oneindig gaat, zodat intuïtie I volledig tot zijn recht komt.

5. In het geval van een onafhankelijke serie zal er in de praktijk weinig reden zijn om aan te nemen dat de analoog aan (2) en (3) te postuleren waarschijnlijkheden gelijk zijn voor de verschillende onafhankelijke hypothesen. Veronderstellingen over ongelijkheden zullen juist de volgorde van de onafhankelijke toetsen bepalen. Niettemin is het voor onze theoretische beschouwingen, waarbij het uiteindelijk alleen om kwalitatieve en niet om kwantitatieve conclusies gaat, onproblematisch deze simplicerende vooronderstellingen te maken: we postuleren (2) en (3), met gelijke P

en r voor alle in het geding zijnde hypothesen. In het verlengde van (1) en verdergaand dan (4) postuleren we tot slot de (afgezien van B) onvoorwaardelijke onafhankelijkheid van de tests:

(6)

$$p(\pm t_i, \pm t_j/B) = p(\pm t_i/B) \cdot p(\pm t_j/B), \; i \neq j$$

voor alle combinaties.

Uit het voorgaande volgt nu voor een onafhankelijke serie:

(7)

$$\begin{aligned} MW(t_{n+1}; S_n) = & \; [p(H(t_i VB) + p(-H(t_i VB) \cdot p(+t_i/B\&-H(t_i))]^n \times \\ & \; p(-H(t_{n+1} VB) \cdot p(-t_{n+1}/B\&-H(t_{n+1})) \\ = & \; (P + (1-P) \cdot r)^n \cdot (1-P) \cdot (1-r). \end{aligned}$$

Wederom gaat deze uitdrukking naar O als n naar oneindig gaat, zodat ook intuïtie II tot zijn recht komt.

6. We vergelijken de meerwaarde van een extra test in een herhalingsserie (5) met die in een onafhankelijke serie (7) door het quotiënt te nemen; dit is, na vereenvoudiging,

(8)

$$r^n / (P + (1-P) \cdot r)^n.$$

De gemaakte vooronderstellingen dat $P \neq O$ en $r \neq 1$ garanderen dat dit quotiënt onder alle resterende omstandigheden naar O gaat als n naar oneindig gaat en dit is een exacte realisering van intuïtie III.

7. Uiteraard zouden we het laatste, cruciale resultaat niet bereikt hebben als we het tussenniveau van universele hypothesen niet zouden hebben ingevoerd en wel om de simpele reden dat niet-invoering in feite neerkomt op $P = O$, dat wil zeggen de waarschijnlijkheid O voor (alle) universele hypothesen. In dat geval leveren (5) en (7) dezelfde meerwaarde. Men kan de gepresenteerde explicatie derhalve bekritiseren vanwege de klaarblijkelijke vooronderstelling van 'non-zero probabilities for universal hypotheses'. Men kan de explicatie echter ook beschouwen als extra reden om dergelijke positieve waarschijnlijkheden te aanvaarden, in het besef dat er pas sprake zou zijn van inductivisme als we de vooronderstelling van voorwaardelijke onafhankelijkheid (4) zouden hebben opgegeven.

8. In pogingen om de 'diminishing returns' te verklaren is vaak naar voren gebracht dat er veel situaties zijn waarin een test maar één keer hoeft te worden uitgevoerd en dat herhalingen geen waarde meer hebben hoogstens ter controle of de eerste uitvoering wel goed is geweest. Deze situatie komt er op neer dat de achtergrondkennis impliceert dat ofwel de betreffende universele hypothese geldt ofwel de tegenovergestelde universele hypothese: alle tests ervan zullen een tegenvoorbeeld opleveren.

Dit correspondeert exact met de situatie dat we op grond van B mogen aannemen dat de in (3) gepostuleerde $r = p(+t_i/B\&-H)$ gelijk is aan 0. Uit (5) volgt nu dat de waarde van de eerste test gelijk is aan (1–P) en dat de meerwaarde van elke herhaling gelijk is aan 0. In een onafhankelijke serie krijgen we, volgens (7), als meerwaarde van een extra test: $P^n(1-P)$ en dit blijft geleidelijk naar 0 gaan. In beide gevallen is het gedrag zoals men intuïtief zou mogen verwachten in dit geval: één test hoeft in principe maar één keer te worden uitgevoerd, maar onafhankelijke extra tests zijn zinvol, hoewel ook daar het belang van afneemt.

9. De voorgaande explicatie roept het vermoeden op dat er verscheidene op het eerste gezicht inductivistische intuïties zullen zijn die met behulp van een a priori benadering aanvaardbaar en verklaarbaar worden vanuit deductivistisch gezichtspunt. Een nauw aan het voorgaande verwant voorbeeld is de intuïtie
IV op den duur is voortzetting van regelmaat waarschijnlijker dan doorbreking van regelmaat.
In termen van een herhalings-serie kan dit a priori worden opgevat:
vanaf zekere n geldt: $p(+t_1, +t_2, \ldots, +t_n, +t_{n+1}/B) >$
$p(+t_1, +t_2, \ldots, +t_n, -t_{n+1}/B)$. De vraag is dus of vanaf
zekere n geldt: $P + (1-P) \cdot r^{n+1} < (1-P) \cdot r^n \cdot (1-r)$.
Als $r \leqslant ½$ of $P \geqslant ½$ geldt dit voor iedere n, als $r < ½$ en $P < ½$ geldt dit zodra r^n kleiner is geworden dan $P/((1-P)(1-2r))$.

10. Het lijkt er dus op dat een herformulering van Poppers wetenschapsfilosofie mogelijk is die recht doet aan allerlei ogenschijnlijk inductivistische intuïties, dit onder de voorwaarde dat universele (experimentele) hypothesen, op het niveau tussen algemene theorieën en basisbeweringen, in ere worden hersteld.

(vervolg van blz. 285)

dat het historisch materialisme van alle sporen van subject-object idealisme gereinigd wordt; en ten derde dat de geëxpliciteerde normen gerelateerd worden aan de wijze waarop schaarse goederen, behalve van economische ook van culturele aard, worden verdeeld. Zolang normatieve beschouwingen daar niet over gaan, blijven zij, in navolging van een rijke traditie, het toernooiveld van groepen wier economische belangen elders veilig verzekerd zijn.